福井大学教育実践研究　2014，第39号，pp1－9

実践論文

高校生を対象とした数学探求コンテスト
― H25ふくい理数グランプリ（高校・数学）の実践報告 ―

福井大学教育地域科学部　西　村　保　三
福井県教育庁高校教育課　入　羽　弘　之
福井県立敦賀高等学校　牧　田　進　一
福井県立藤島高等学校　塚　崎　　　覚
福井県立高志高等学校　杉　本　直　人
福井県立武生高等学校　朝　倉　正　顕

福井県では，平成20年度より中高生を対象とする理数系科目の競技大会「ふくい理数グランプリ」を実施している。このグランプリでは，実生活に関連した理科や数学の課題に取り組むことによって，中高生の理数系科目への興味関心を喚起するとともに，科学的な思考力・判断力・表現力などを育成することを目的としている。当グランプリの高校・数学部門では平成24年度より，本選において，３人１組のチームで探求活動を競う競技形式を採用している。本稿では，平成25年度のふくい理数グランプリ（高校・数学）の実践を報告する。

キーワード：数学的活動，問題解決学習，多面体，図形の分割，展開図

１．はじめに

近年，中高生を対象とする理数系科目の競技大会が，全国各地で行われている。福井県でも「理数好きの裾野を広げ，トップを伸ばす」のスローガンの下，県教育委員会が，高等学校教育研究会理科部会，同数学部会との共催によって，平成20年度より「ふくい理数グランプリ」を開催している（石井他2009，葛生他2011など参照）。当グランプリは，中高生を対象に，実生活に関連した理数の課題に取り組むことによって，数学・理科や科学技術に対する興味や関心を喚起するとともに，科学的な思考力・判断力・表現力などを育成することを目的としている。大会は，大きく中学と高校の部に分かれており，中学の部は数学と理科の２つの部門（平成24年度まで）があり，高校の部は，数学・物理・化学・生物・地学の５つの部門に分かれ，それぞれ教科名を冠して「〇〇グランプリ」と呼称している。平成25年度の高校の部の参加者は，数学が105名，物理・化学・生物・地学が合計200名と，過去最高の参加者数を記録して，本事業が県内の中学・高校に周知されてきた様子が伺える。当グランプリの大会方式は，理科では第１回大会当初から，３人１組のチームで，実験・観察と発表などの探究活動に取り組む競技形式を採用していたが，数学グランプリでは，平成23年度までは個人戦による筆記問題形式であった（石井他2009，葛生他2011参照）。しかし，平成23年度よりJSTが，高校生を対象とした理数探求の全国大会「科学の甲子園」を開催して，ふくい理数グランプリがその出場校を決める福井県予選の意味づけを与えられたことなどがきっかけとなり，平成24年度から数学もチームで探究課題（数学的活動）に取り組む問題解決形の大会方式に変更した。しかし，従来の個人戦方式も捨てがたいという意見も多く，また参加者が年々増加していることを考慮して，予選（チャレンジステージと呼称）と本選を行う次のような２段階方式を採用した。

・エントリーは３人１組のチームで行う。予選は個人で筆記問題に取り組み，チームの合計点で上位10チーム程を本選通過させる。
・本選ではチームで探究課題（数学的活動）に取り組む。
・予選の筆記問題の結果で，個人の部を表彰する。

表彰については，団体の部と個人の部の両方で行い，最優秀賞，優秀賞，奨励賞を設けて賞状を贈る。また，数学・物理・化学・生物・地学の各グランプリの入賞チームの所属する高等学校にポイントを与え，その合計点が最も高い高等学校が「科学の甲子園全国大会」への代表権を獲得する（注．全国大会参加チームは，理数グランプリ参加者とは限らない）。本稿では，平成25年度の数学グランプリ（高校の部）の実践を報告する。なお数学グランプリの実行委員は，県教育庁の入羽と，県立高校から選ばれた数名の数学教員，およびアドバイザーの西村で構成されており，牧田をリーダーとして，委員全員で協働して，問題の作成から大会運営までを担当している。本稿の執筆は，平成25年度の数学グランプリ実行委員の共著とし，入羽から提供された大会の記録を元に，筆頭著者の西村が全体を取りまとめたものを，共著者全員で内容を確認・修正を加える形で進めた。

２．チャレンジステージ

2013年９月８日に福井大学文京キャンパスで開催された数学グランプリ・チャレンジステージ（予選）には，

９校から36チーム105人が参加した。予選では，個人で筆記問題に取り組むが，「日常に潜む数学にチャレンジ！」をテーマとして掲げており，実生活と関連した問題を出題している。表１にチャレンジステージのタイムスケジュールを示す。本稿では，平成25年度に出題した問題の一部のみを紹介する。

表１：チャレンジステージ

時間	内容
9：00～ 9：20	受付
9：30～11：30	問題にチャレンジ
11：30～11：45	休憩
11：45～12：30	解答・解説

【H25チャレンジステージ問題】

$\boxed{1}$(2) 図のように４地点P, Q, R, Sに消防署がある。それぞれの管轄を明確にするために，境界線を決めたい。各消防署が効率よく消火活動ができるように境界線を回答欄の図に作図せよ。ただし，道路や建物は無視する（問題図は省略）。

$\boxed{1}$(3) 日本の主な畳の種類には，関東間，京間，福井間などがある。福井間の１畳の大きさは，182×91cmである。畳を切らないで長方形の部屋に畳を敷き詰めたい。次の問いに答えよ。

（ｉ） 長方形の部屋が182×546cmのとき，畳の敷き詰め方は何通りあるか求めよ。

（ⅱ） 長方形の部屋が182×1092cmのとき，畳の敷き詰め方は何通りあるか求めよ。

$\boxed{3}$ 地球温暖化問題に関して，温室効果ガス排出量の削減が求められている。鳩山由紀夫元首相は，2009年の国連気候変動サミットで，2020年までに温室効果ガスの排出量を1990年比で25％削減することを国際公約した。実は，2009年の時点で，温室効果ガスの排出量は，1990年比で８％増加していた。では，2009年から毎年前年比でｄ％の削減を行って，11年後に目標を達成するには，ｄを幾らに設定する必要があるか，そのような最小の整数ｄを求めよ。必要ならベルヌーイの不等式 $(1+x)^n \geqq 1+nx$ （$|x|<1$，ｎは自然数）を利用してもよい。

＜解説＞

$\boxed{1}$(2) 線分PQ，PR，QR，QS，RSの垂直２等分線を作図して，それらの交点を結べばよい（図１）。いわゆる「ボロノイ図」をテーマにした問題で，郵便局の配達エリア，最寄駅，動物のなわばりなど，様々な応用がある。中学または数学Ａの平面幾何の領域の問題で，定規とコンパスの作図によって，実技問題の要素も含めている。

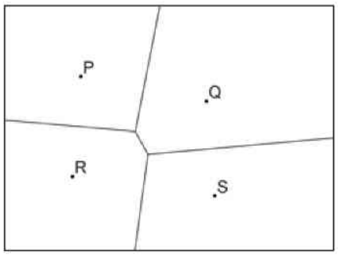

図１：解答図$\boxed{1}$(2)

$\boxed{1}$(3)

（ｉ） 13通り （略）

（ⅱ） 233通り。182×91nの部屋の畳の敷き詰め方を a_n 通りとすると，182×91(n+2)の部屋の畳の敷き詰め方 a_{n+2} は，次の２つのケースがある（図２）。

図２：畳の敷き詰め

従って，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ という漸化式が得られ，$a_1=1$，$a_2=2$ から始めて $a_3=a_2+a_1=1+2=3$，$a_4=a_3+a_2=3+2=5$，…と計算して $a_{12}=233$ を得る。

この問題では「福井間の畳」という地元の題材を取り上げている。(ｉ)で組合せを数えさせ，その作業を通して規則性に気付かせ，(ⅱ)で数列（数学的帰納法・漸化式）の考え方を応用する。答えに現れる数列は，フィボナッチ数列に他ならない。

$\boxed{3}$ 答え：4%

$1.08\times\left(1-\frac{d}{100}\right)^{11}\le 0.75$ を満たす最小の整数 d を求めればよい。

$1-\frac{d}{100}=\frac{1}{\left(1+\frac{d}{100-d}\right)}$ であるから上の不等式は,

$\left(1+\frac{d}{100-d}\right)^{11}\ge\frac{1.08}{0.75}=\frac{36}{25}$ と同値である。

ベルヌーイの不等式より $\left(1+\frac{d}{100-d}\right)^{11}\ge 1+\frac{11d}{100-d}$

であるから， $1+\frac{11d}{100-d}\ge\frac{36}{25}$ を解いて， $d\ge\frac{50}{13}=3.8\cdots$

従って，毎年4%の削減なら目標を達成できる。なお毎年3%削減した場合には,

$$\left(1-\frac{3}{100}\right)^{11}=\left(1-\frac{3}{100}\right)^{5}\left(1-\frac{3}{100}\right)^{6}\ge\left(1-\frac{15}{100}\right)\left(1-\frac{18}{100}\right)=0.697>\frac{25}{36}$$

であるから，目標は達成できない。

地球温暖化問題をテーマに，指数関数と不等式の問題を出題した。実際のデータでは 2009 年の時点で，温室効果ガスは 1990 年比で 9 %増加しているが，1.08/0.75＝1＋11/25 の分子が 11 年間という数字でちょうど割り切れて都合がよいため，この問題では 8 %に数値を変更した。

この他，1 (1)は最短経路の問題で，立体の展開図を考察する。2 はコンビニで人と出会う確率をテーマとした，連続分布の確率の問題であり，最終的に座標平面上で領域の面積を求めることに帰着する。4 は会社の報奨金制度をテーマとした，２次の不定方程式の問題を出題した（詳しくは竹内2014参照)。内容的には，どれも高校２年生の夏休みまでに習う数学の知識で解けるものであるが，実生活への数学の活用を意識した，いわゆる PISA 型の問題となっており，平均正答率はかなり低かった。

チャレンジステージの成績によって，36チーム中１～10位までの11チーム（10位は同点で２チーム）を本選通過とし，また個人の部の入賞者６名を決定した。予選通過した11チームの所属高校の内訳は，高志高校４，藤島高校３，武生高校２，若狭高校１，福井高校１チームである。なお，今回の大会では，個人の部で入賞した上位６人が所属するチームは，全て本選通過を果たした。

＜アンケート＞

チャレンジステージ参加者のアンケート（自由記述・無記名）に記されていた感想を幾つか紹介する。

・日常生活に普通にあるようなささいな出来事の問題が多くて，自分のまわりには数学がたくさんあるのだと感じました。
・学校で普段習っているようなことを使わないで，私たちの日常生活に関する問題が出てきたので，こんな問題も数学と組み合わさってくるのが驚きでした。
・全ての問題が日常生活に登場するものに関連していてイメージはしやすかった。普段の生活の中にも数学が使える場面があるのだとわかった。
・出題された問題はどれも身近でかつおもしろく，普段の数学では絶対に出会えない問題でとてもよかった。
・普段見たこともない問題ばかりであまりできなかったけど，おもしろい問題ばかりだったので，とても楽しめました。今日のグランプリで，より数学に興味を持ったので，インターネット等でおもしろい数学の問題を探して，チャレンジしたいと思った。
・講評で解説してくださった先生が話していた，ボロノイ図の応用などの数学以外の話も面白いと思いました。
・難しすぎてほとんど解けなかったです。いつもはやり方がある程度わかっている問題を解いているけど，今回は全然手が付けられなくて，こういう自分でじっくり考えなければいけない問題も解かないといけないと感じました。いい経験になりました。
・見たこともないような問題形式で，とても難しかったが，新たな知識をつける機会になったと思う。

参加者の感想では，難しかったという意見が最も多かった。普段の学習において，理数グランプリで出題されるような，日常生活に関連した問題をほとんど勉強しておらず，数学の応用力・活用力が弱いことが感じとれる。「普段の生活の中でも数学が使える場面があるのだとわかった」という意見が出る背景には，数学は実生活で使うことはないと考えていたことを意味しており，普段の数学の授業が，実生活と剥離している様子が，このアンケート結果からも伺える。

３．グランプリ本選

本選は，9月20日に福井県立武生高等学校で開催され，チャレンジステージの上位11チームが参加した。グランプリ本選のタイムスケジュールを表２に示す。

平成25年度の本選は「はかる!!」をテーマとして掲げて，与えられた正方形の紙から，条件を満たしてなるべく容積の大きな箱を作る課題を設定した。このテーマは，第１回科学の甲子園（科学技術振興機構2012）でも取り上げられたもので，大会の運営方法でも科学の甲子園のルールを参考にした。科学の甲子園と本大会の違いは，本大会では課題を３つ用意して，作る箱にそれぞれ異なる条件を加えたことと，単に大きな箱を作ったチームを勝ちとするのではなく，後でどう考えたかを発表させて，その優劣を主な評価としている点である。

表２：グランプリ本選

時間	内容
9:00～ 9:40	受付・開会式
10:00～12:00	本選（2h）
12:00～13:00	昼食・休憩
13:00～13:30	発表準備
13:30～15:00	発表
15:00～16:00	休憩・講評・移動
16:00～16:40	表彰式・閉会式

【グランプリ本選問題】

1　１辺の長さが１である正方形の紙を使って，図３の展開図から，正四角錐台の紙コップを作った時に，なるべく容積を大きくする x, y の値を小数で求めよ。

※用紙に x, y の値を記入して，11:00までに提出すること。

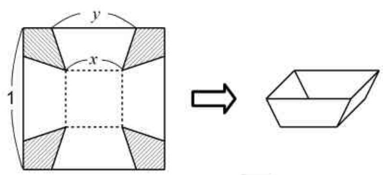

図３：問題図 1

$\boxed{2}$ １辺の長さが24cmの正方形の紙を使って，直方体の箱（ふたのない５面からなる箱）でなるべく容積の大きなものを作れ。切り取り線図と組み立てた箱を提出せよ（縦・横・高さと体積は明示せよ）。ただし，紙はパーツに分けて切り貼りしてよいが，箱を作るパーツは５つ以下とする（６つ以上に紙を切り分けて，５つ以下のパーツで箱を作って余りを使わずに捨てるのはよい）。
※切り取り線図と組み立てた箱を，12：00までに提出すること。
（例）

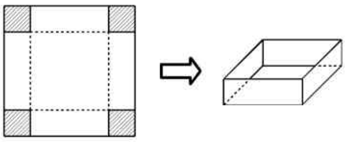

図４：問題図 $\boxed{2}$

切り取り線図は，切り取り線を実線で，折り線を点線で描き，使用しなかったパーツは斜線で表すこととする。図４の例では，箱を作る使用パーツ数は１個である。

$\boxed{3}$ １辺24cmの正方形の紙を使って，ふたのない自由な箱でなるべく容積の大きなものを作れ。切り取り線図と組み立てた箱を提出せよ。ただし以下の条件を課す。
- 箱は曲面ではなく，平面で構成される多面体で，開口部が平面であること。
- 箱に砂を詰めたときに，隙間から砂がこぼれないように制作すること。また十分に強度のあるものを制作すること。
- 紙は切り貼りしてよいが，箱を作るパーツは10個以下とする。

※箱のチェックを受けるために，13：20までに提出すること。
注．問題文の文章を一部省略している。原文は竹内2014参照。

３つの課題は，本選開始時点で同時に出題しており，発表準備や箱の制作などチームで協力して進めるものとする。その際の時間配分や作業分担は，それぞれのチームに任せる。また各チームには用具として，定規，はさみ，カッター，セロハンテープ，マジック，電卓（各班３個ずつ），箱を作る24cm四方の厚手の用紙２枚，切り取り線図を描く提出用紙２枚，発表原稿のための用紙，計算用紙があらかじめ配布されている。課題$\boxed{1}$と$\boxed{2}$は理論的な容積を計算して比較し，課題$\boxed{3}$は発表時に，審判が箱に砂を詰めて重さを計測することにした。

課題説明の後，生徒の様子を観察すると，全てのチームが，課題$\boxed{1}$だけに集中して，３人で相談して取り組んでいた（図５）。課題$\boxed{1}$の提出期限が一番早いとはいえ，課題$\boxed{1}$を１人に任せて，他の２人は他の課題を考えるとか，課題$\boxed{1}$を30分程度で済ませて，次の課題に進むといった戦略もあると思うが，どのチームも，全員で相談して１つの課題に取り組み，11:00に課題$\boxed{1}$の提出が済んでから，次の課題に取り組んでいた。発表準備は，課題と並行して行うことを想定して，時間をあまり取っていないので，どのチームもなかなか次の課題に進まない様子を見ていると，このままでは後半，時間が足りなくなるのではないかと心配になった。

図５：課題$\boxed{1}$に取り組む生徒の様子

3.1 課題$\boxed{1}$

この問題で作られる四角錐台形の箱の容積Vはx, yの次の２変数関数で表される。

$$V=\frac{1}{6}(x^2+xy+y^2)\sqrt{(1-y)(1+y-2x)}$$

このグラフを図６に示す。上式を求めた後は，電卓を使ってx, yに適当な値を代入して，Vをなるべく大きくするx, yを探せばよい。その結果，x=0.53564006，y=0.782304838のときに，Vは最大値0.0864197003を取ることがわかる（反省点として，課題$\boxed{2}\boxed{3}$と合わせて，課題$\boxed{1}$でも紙は24cm四方にした方がよかった）。

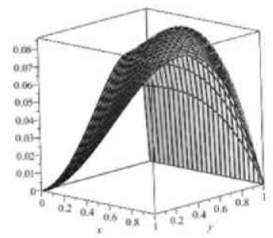

図６：$z=V(x, y)$ のグラフ

この問題は，多変数関数の極値問題として厳密に解くこともできるが，高校の範囲を超えるので，講評・解説の時に概略を説明して，より高度な数学への興味付けとした。

〔課題$\boxed{1}$の解説の概略〕
Vをx, yで偏微分して，$V_x=V_y=0$となるx, yの関係式を求めると，

$$y=(5x^2-2x)/(1-x),\qquad 21x^3-11x^2+2x+1=0$$

が得られ，xは３次方程式 $g(x):=21x^3-11x^2+2x+1=0$ の解である。３次方程式の解は，カルダノの公式で代

数的にも求められるが，下式のように，虚数を含む式で表され，数値がわかりにくい。

$$x=\frac{11}{63}+\sqrt[3]{-\frac{5087}{500094}+\frac{\sqrt{107}}{882}i}+\sqrt[3]{-\frac{5087}{500094}-\frac{\sqrt{107}}{882}i}$$

上式の数値は，（逆）三角関数が計算できる関数電卓か関数表があれば求められるが，ここでは**ニュートン法**を使った数値解法を紹介する。$g(x)=0$ は0.5付近と0.3付近に解を持つが，求める解は0.5付近の解であることに注意する。$x_0=0.5$ とおき，漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}=x_n-\frac{21x_n^3-11x_n^2-2x_n+1}{63x_n^2-22x_n-2}$$

で定まる数列を考えると，$x_4=0.53564006$ まで計算したところで，$g(x_4)\fallingdotseq 0$ となって収束する。このとき $y=0.782304838$ である。

どのチームも課題$\boxed{1}$には，長時間を費やした割には，ほとんどできておらず，真の答に肉薄した数値を提出したチームは皆無だった。２チームは体積０（$y=1$）となる見当外れな答えを提出し，１チームは $x>y$ で逆に口がすぼんだ形を提出した。$y=1$ の展開図では，立体の箱が作れないことは，実際に試してみればすぐわかることであり，口すぼみ形は，蓋と開口部を入れ替えると紙が余るので，効率が悪いことは直観的に明らかである。このように，机上の計算が現実に当てはまるか全く検証していなかったり，数学的な直観が働いていない答案が少なくとも４チームあった他，$x=y$ で課題$\boxed{2}$と同じ直方体の答えを提出したチームもあった。なお課題$\boxed{1}$の１～３位は，チーム石脇，ＥＹＯ，team安念トロールの順であった。

この問題では，生徒は計算によって厳密解を求めることにこだわり，電卓に適当な数値を代入して試行錯誤でなるべくよい答えを探すという発想に至らなかったようである。

3.2 課題$\boxed{2}$

初めに，与えられた面積Aで，直方体の箱を作った時に体積Vを最大にするときの縦x・横y・高さzの比が幾らかを考察する。これは条件付き極値問題と呼ばれ，一般的にはラグランジュの未定乗数法という大学初年次で学ぶ微積分の手法を使って解かれるが，ここでは高校生の知識で解けるように，相乗平均・相加平均の関係式を使って説明する。$A=xy+2xz+2yz$，$V=xyz$ であるから，相乗平均・相加平均の関係より，

$$\frac{A}{3}=\frac{xy+2xz+2yz}{3}\geq\sqrt[3]{xy\cdot 2xz\cdot 2yz}=\sqrt[3]{4}V^{\frac{2}{3}}$$

等号成立は，$xy=2xz=2yz$ すなわち $x:y:z=2:2:1$ のときに Vは最大値を取る。従って，課題$\boxed{2}$は，正方形の紙からなるべく多くの面積を使って，縦横高さの比が2:2:1になるべく近い箱を作るという問題になる。最善の解答は，正方形を５つ以下のパーツに分けて，余りなく，縦横高さの比が2:2:1の箱を作ることで，この場合の体積は，$768\sqrt{3}=1330\mathrm{cm}^3$ となる（図７）。

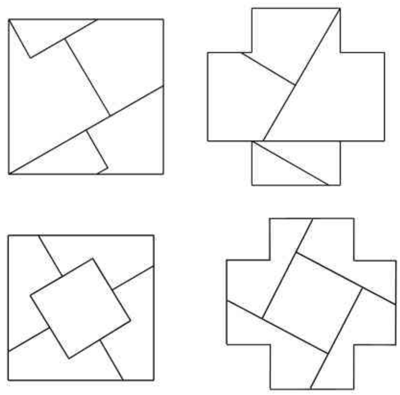

図７：最善の分割例

図７の分割法は，前者はLindgren1972，マーチン・ガードナー1976等を参考に我々が独自に考えたもので，後者は第１回科学の甲子園総合問題の解答例からの取材である。

＜生徒の解答例＞

課題$\boxed{2}$については，実際に箱を作って提出させ，最後に考察を発表してもらったが，上記の模範解答に近い考え方をしたのは，最優秀賞を獲得した真夏の恒等式チームのみであった。

真夏の恒等式チームは，図形の対称性から，箱の底面が正方形の時に容積が最大になると判断して，正方形の１辺をx，高さをyとおき，表面積が $x^2+4xy=576$ の条件の下で容積 $V=x^2y$ を最大にすることを考えた。この式からyを消去して $V=144x-x^3/4$ の最大値を微分法によって調べたが，ここで計算ミスをして $x=9\sqrt{2}$ のときにVが最大になると考察した（正しくは $x=8\sqrt{3}$）。しかし，紙を余りなく使って $x=9\sqrt{2}$ の箱の展開図を作ることは難しかったので，紙を余りなく使うことを優先して，図８の展開図から $x=12\sqrt{2}$ とした箱を設計した。この場合の箱の容積は $864\sqrt{2}=1222\mathrm{cm}^3$ であり，容積の順位でも11チーム中１位であった。

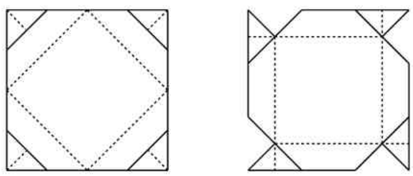

図８：課題$\boxed{2}$の生徒の解答例

他に，チームファントムが，紙を余りなく使って，底面が長方形の箱を作って２位に入ったが，残りの９チームは驚くべきことに全く同じ答えを提出した（図９）。それは，数学Ⅱのどの出版社の教科書にも載っている次

の例題の解答であるが，これで作られる箱の容積は1024 cm³しかなく最善の解答にはほど遠い（川中ほか2012等。数値は課題[2]に合わせて変えている）。

図９：課題[2]の提出

例題．１辺が24cmの正方形の厚紙がある。図４のように，四隅から合同な正方形を切り取って，蓋のない直方体の箱を作るとき，箱の容積の最大値と，切り取る正方形の１辺の長さを求めよ。
解答．切り取る正方形の１辺をxとする（$0<x<12$）。このとき箱の容積は，$y=x(24-2x)^2=4(x^3-24x^2+144x)$である。$y$を$x$で微分して，$y'=12(x^2-16x+48)=12(x-4)(x-12)=0$より，$x=4$のときに$y$は最大をとり（増減表は省略），このとき$y=1024$cm³である。

この問題は，ほとんどの生徒が知っており，課題[2]とよく似ているため，記憶していた解答をそのまま答えたものと思われる。また，問題図（図４）が例題の図と似ていることにミスリードを受けた可能性もある。実際，様子を見ていると，課題[2]に時間を掛けているチームは少なく，問題配布時から「課題[2]は知ってる」という自信ありげな生徒の声があちらこちらから聞こえていた。教科書の例題では，四隅を捨てることを前提としており，紙を切り貼りして使ってよい課題[2]とは状況が異なるのだが，問題の解法パターンを暗記するという普段の勉強スタイルが影響しているのではないかと推測する。

3.3 課題[3]

最終課題は，パーツを10個以下という条件を付けた以外は，第１回科学の甲子園の総合問題とほぼ同一課題である。解答の自由度が高く，各チームの自由な発想による箱作りを期待していた。各チームの作った箱の容積を理論的に計算することは困難さが予想されたので，容積は発表時に箱に砂を詰めて重さを計測することにした。昼食休憩と午後の時間中，どのチームも箱作りと発表準備に熱心に取り組んでいた（図10）。結果，制限時間ギリギリまで掛かって，様々な形状の箱と展開図ができあがった（図11）。

図10：箱作りと発表準備

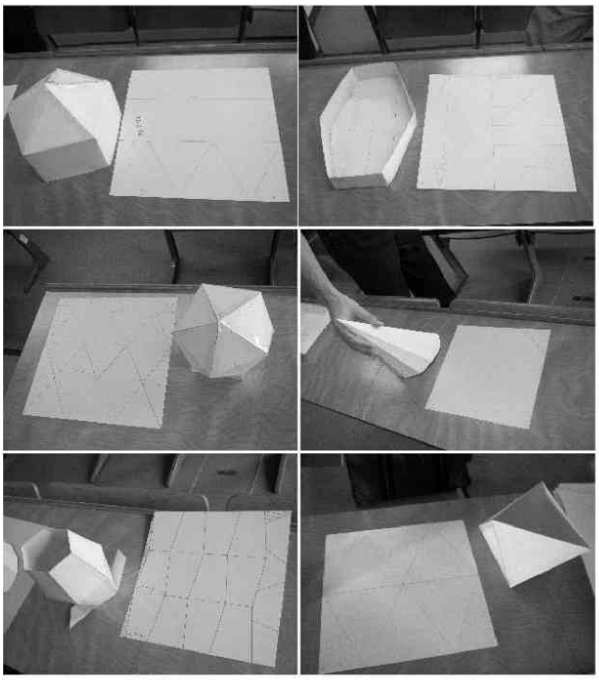

図11：課題[3]で提出された箱と展開図

安直に，課題[1]の展開図をそのまま利用して，ほぼ同じ四角錐台の箱を作ったチームが４チームあったが，それ以外の７チームは，何らかの点で，独自の工夫を凝らしていた。しかし，課題[1]の$x>y$のケースと同様，効率の悪い口すぼみ形状の箱を作ったチームが３チームあった。例えば，正20面体に口をつけた形状の箱を作ったElite Academyチームは，表面積一定で体積を最大にする図形は球だと勘違いしていた（蓋がある場合はそうだが，この課題では半球が最大）。発表では，各チームがどのように考えて，箱を設計したかをA4用紙に書いた原稿をプロジェクターで投影して口頭で発表してもらい，説明のわかりやすさや，論理的な説明かなどを審判が評価した（図12）。発表の後で，砂を詰めて重さで箱の容積を計測したが，この作業はとても盛り上がっていた（図13）。

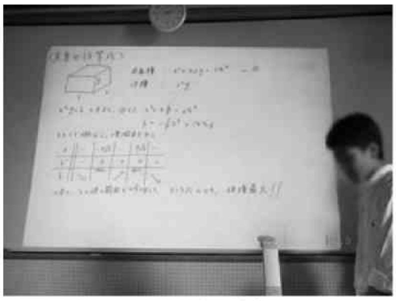

図12：発表の様子

図13：砂を詰めて箱の容積を計測する

表３：課題 $\boxed{3}$ の結果

	チーム	形　状	砂(g)
1	真夏の恒等式	五角柱＋錐	2001
2	Elite Academy	正20面体＋ロ	1568
3	ファントム	六角錐台	1455
4	数理探求部i	四角錐台	1455
5	ＥＹＯ	四角錐台	1439
6	チーム石脇	四角錐台	1436
7	千代 and so on	四角錐台	1433
8	team安念トロール	六角柱	1425
9	武生Ａ	六角錐台×２（樽形）	1357
10	地歴公民	斜十角錐	1323
11	team１１０	正八面体	1320

課題 $\boxed{3}$ で，最も大きな箱を作ったのは，課題 $\boxed{2}$ でも最大の箱を作った真夏の恒等式チームで，2001gの砂を詰めることができた。なお砂の密度は1.30g/cm³である。3〜8位はわずか30g差に６チームが入る接戦（うち４チームはほぼ同じ箱）で，砂による計測では誤差が大きいので，理論的な容積による順位と，計測順位は必ずしも一致していない。下位の２チームは，容積換算すると，課題 $\boxed{2}$ で作った1024cm³の箱よりも小さく，自由な発想で工夫したことが逆にマイナスになっている（表３）。

＜講評時に紹介した解答例＞

表面積がA=576cm² の箱で，容積が最大になるのは，半球のときで，$V = A^{3/2}/3\sqrt{2\pi} = 1838cm^3$ である。しかし，多面体で半球を作ることはできないので，半球に近い形を作ることを考える。例えば図14に示す六角柱と錐を結合した箱は$896\sqrt{3}$＝1552cm³である。

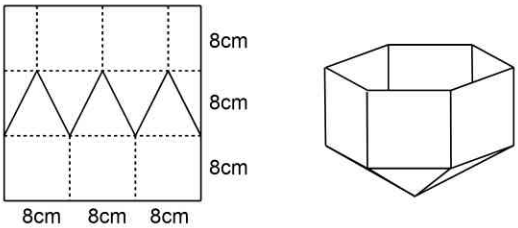

図14：六角柱＋錐1552cm³

図14の展開図は六角形を利用しているが，角数を増やして円柱＋円錐に近づければ，体積を増やすことができる（図15)。この方法で円柱＋錐を作る場合，円柱部分の高さを$12-36/\sqrt{5}\pi$=6.88cmにした時に容積は最大になり，1678cm³が限界値である。

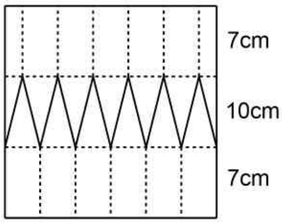

図15：12角柱＋錐1651cm³

半球に近い多面体として，正20面体の半分（五角錐＋反五角柱の下半分）を考えると，もしも余りなく紙を使えれば，1674cm³の箱が作れる。図16は，正方形を６ピースに分割して，余りなく箱の展開図を作った例である。

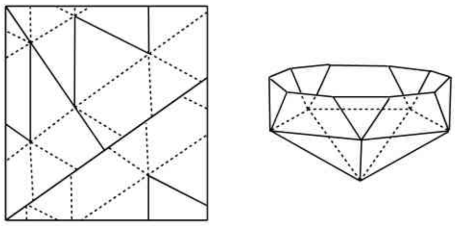

図16：正20面体の半分1674cm³

＜生徒の解答例＞

地歴公民チームは，図17に示す展開図から斜十角錐の箱を作ったが，開口部を平面にすることには苦労していた。この箱をうまく作ると，理論的な体積は1030cm³になるが，砂による計測値は容積換算で1017cm³であった。開口部を平面にする際，机の上面に合わせてカットしたため，切り過ぎたことが原因と考えられる。

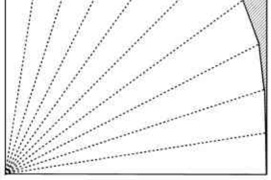

図17：斜十角錐

Elite Academyチームは，正20面体に平面の開口部を持つ口をつけた箱を，なるべく紙の余りを出さないように工夫して設計していた（図18）。この課題では半球が最善であるのに，球と勘違いしたのが，痛恨のミスであったが，複雑な箱の展開図の設計は，審査員を驚かせた。なおこの箱の理論的な体積は1140cm³である。

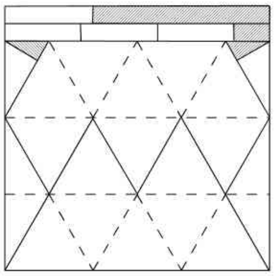

図18：正20面体＋口

team安念トロールは，図19の展開図から，六角柱の箱を作った。この箱の理論的な体積は，$768\sqrt{2}$=1086cm³である。ここで，六角形の長い辺が12cmになるように紙の左半分の上下を少しカットしているが，右下の使っていない部分を利用すれば，実はカットは不要であり，少し改良すれば1152cm³の箱を作ることができた（実は六角形にせず12×24×4の直方体の箱を４パーツで作ることもでき，課題$\boxed{2}$で２番目に大きな箱が作れた）。

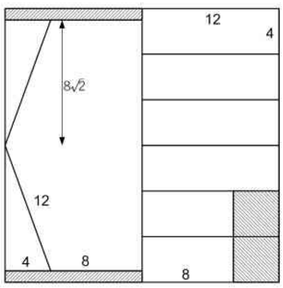

図19：六角柱

参加チーム中で最大の箱を作ったのは，優勝した真夏の恒等式チームで，図20の展開図から，五角柱＋錐の箱を作った。図14と本質的に同じ展開図だが，５ピースに分割している。理論的な体積は1507cm³である。

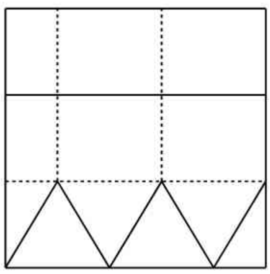

図20：五角柱＋錐

この課題で４チームが図３の展開図から，ほぼ同じ四角錐台の箱を作ったことは少し残念だった。課題$\boxed{2}$と同様，与えられた課題に対して，自分たちで工夫して独自に解決法を考えるよりも，既存の解答（マニュアル）を真似ることで済ませる傾向があることが，この課題からも見て取れる。

評価は，課題$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$の順位点を0～10点とし，プレゼンの評価と，チャレンジステージの得点を加えた総合点で行う。ただし，論理的に考えて，より大きな箱を作ったという点は，発表の「論理性」の面において高く評価されやすい傾向にはある。また採点競技の常ではあるが，プレゼンテーションの評価は，各審判の主観に任されている部分があり，それが妥当なものといえるかどうかは今後の検討課題である。結果は，課題$\boxed{2}$ $\boxed{3}$の両方で最も大きな箱を作った真夏の恒等式チームが最優秀賞を獲得した。その他の表彰チームを表４に示す。

表４：団体の部表彰チーム

賞	チーム名	学校名
最優秀賞	真夏の恒等式	藤島高校
優　秀　賞	Elite Academy	高志高校
優　秀　賞	ファントム	若狭高校
奨　励　賞	team安念トロール	藤島高校

なお個人の部の最優秀賞は，高志高校の渡辺濯也君（数理探究部i）が受賞し，理科の部門の評価と合わせた科学の甲子園予選では，藤島高校が出場権を獲得した。大会の結果は，入賞者の写真と名前入りで，翌日の福井新聞に詳しく掲載された（福井新聞2013）。

＜アンケート＞

本選参加者のアンケート（自由記述・無記名）に記されていた感想を幾つか紹介する。

・団体戦をいままでやったことがなかったので，とても新鮮味を感じました。自分たちの思いつかないような形を他のグループの人は考えていたのですごいと思いました。
・普段の授業の中で，３人で協力して問題を解くという経験はほとんどしたことがなかったのでいい経験になりました。
・図形の問題はいつも使わない頭の部分を使っているようで頭がおかしくなりそうでした。他の人のプレゼンはとてもすばらしくて同じ高校生とは思えませんでした。
・プレゼンテーションによって，自分の意見を他の人に伝えたり，他の人の意見を聞くことによって全員がいい経験になったと思います。
・講評での解答例・解説は物凄いもので感動した。５ピースではできないと思っていたのに，実際には出来たのでびっくりした。
・まず初めに思ったことが，３人で１つの事柄に対して共に考えるということがいかに難しく，理解するまで

にかなりの時間が必要になるかということだった。人それぞれ思考の方法が違うため，隣から奇抜な発想が聞けたりして，なかなか刺激的であった。

アンケート結果から，普段グループで課題に取り組んだり，考察を発表するといった数学的活動を伴う問題解決形の学習経験がほとんどない様子が伺えた。このような形式での競技大会は初めてということで，参加した生徒には戸惑いも見られるが，いい経験になったという意見が多かった。

４．まとめ

ふくい理数グランプリの数学部門に，団体戦による実技競技を導入してから２年目になる。本グランプリでは，知識量や計算技術だけではなく，考える力，協働する力，表現する力（プレゼンテーション能力）を要求している。アンケートを見る限り，そのような効果は挙がっていると評価できる。

チャレンジステージ（予選）では，個人で筆記問題に取り組むため，協働とプレゼンテーション能力の育成という面では，不十分であり，本選への選抜および本選課題を考えられるようにするため予備知識を与えるものと位置付けている。数学グランプリの参加者は100人以上と多く，運営を考えると，筆記問題による予選で，本選出場者をある程度絞ることは必要であろう。本グランプリでは，トップレベルだけを育てるのではなく，幅広いレベルの生徒に数学への興味・関心を喚起させることも目的としており，筆記問題であっても，数学に興味関心を持たせ，思考力・活用力を要求する問題を工夫している。アンケートを見た限りでは，参加した生徒もそのことを感じていたようである。また，本グランプリでは，毎年高校の教員が入れ替わりながら実行委員を務めており，作問・運営を通して，教員の教科指導力を向上させる目的もある。参加した生徒からは，「普段勉強している問題とは全然違うので難しかった」という意見が多かった背景には，普段の授業では本グランプリのような「生きた数学」を学ぶ経験がほとんどないことを示しており，理数グランプリというイベントが，普段の授業を改革するきっかけになることを期待している。

引用文献

石井恭子，油谷泉，小島敏弘，葛生伸（2009），科学的探究を競う中高生のイベント「ふくい理数グランプリ」，応用物理教育33(2)，pp. 75-80.

葛生伸，三浦伸広，鳥山治道，平井良樹，中村勇規，油谷泉（2011），中高生を対象とした理数探求コンテスト「ふくい理数グランプリ」－高等学校物理部門を中心として－，応用物理教育35(1)，pp. 39-44.

マーチン・ガードナー著，高木茂男訳（1976），数学ゲームⅠ，講談社ブルーバックス，pp. 61-73.

Lindgren H. (1972), Recreational problems in geometric dissections and how to solve them (Revised edition), Dover Publications.

川中宣明ほか13名（2012），数学Ⅱ，数研出版，p. 202.

科学技術振興機構 理数学習支援センター（2012），第１回科学の甲子園全国大会 総合競技① 問題・解答，https://rikai. jst. go. jp / koushien / tournament / 2011 / index. html

竹内英俊（2014），平成２５年度ふくい理数グランプリについて，福井県立高等学校教育研究会数学部会会誌49，pp. 145-158.

福井新聞（2013），理数ＧＰ藤島４冠，2013年9月23日.

Investigation contest of mathematics for high school students
－A report of "H25 The Fukui Science Grand Prix (High school, Mathematics)"－

Yasuzo NISHIMURA, Hiroyuki NYUBA, Shinichi MAKIDA, Akira TSUKASAKI, Naoto SUGIMOTO, Masaaki ASAKURA

Keywords: mathematical activity, problem-solving-learning, polytope, geometric dissection, net